BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

MEXANİKA

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ДИСПЕРСНОЙ ЖИДКОСТИ В ОРТОТРОПНОЙ ТРУБКЕ

Р.Ю.АМЕНЗАДЕ, Н.А.ДЖАНГИРОВА, Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ
Бакинский Государственный Университет

Теоретические разработки, полученные при решении задач взаимодействия цилиндрической оболочки с протекающей в ней вязкой жидкостью, в силу определенных физических допущений, могут быть перенесены на случай дисперсной жидкости. Это обобщение осуществляется посредством введения эффективного коэффициента динамической вязкости.

В публикуемой работе дается решение одномерной задачи о распространении гармонических волн в ортотропной упругой трубке, содержащей неоднородную несжимаемую жидкость. Численно выявлено влияние концентрации включений на волновые характеристики.

1. Прежде всего, определим систему, описывающую распространение волн малой амплитуды в суспензии, протекающей в деформируемой оболочке. Вначале дадим математическую модель жидкости. Принято считать [1], что многофазные системы представляют собой смеси твердых частиц, жидких капель или пузырей (дискретные фазы), распределенных в жидкости (несущая или непрерывная фаза).

Исследования динамики многофазных систем охватывают обширные области науки и техники и связаны с множеством фундаментальных проблем. Сюда можно отнести, например, такие важные вопросы, как перекачка криогенных жидкостей, выпадение радиоактивных осадков, осаждение, гемодинамика и т.д. Для наших целей дисперсную среду будем трактовать как несжимаемую ньютоновскую жидкость с плотностью воды ρ_f, в которой имеются невзаимодействующие частицы одинакового размера. Предполагается, что скорости непрерывной и дискретной фазы одинаковы. Тогда, эффективная динамическая вязкость μ разбавленной суспензии твердых сферических частиц, обладающих нейтральной плавучестью (т.е. не оседающих и не всплывающих) в несущей жидкости с вязкостью μ_0 вычисляется по формуле Эйнштейна [2]:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2}\varphi \right), \tag{1.1}$$

где φ - объемная концентрация частиц в долях единицы. Этот результат Тейлор [2] обобщил на суспензии капель, которые сохраняют сферическую форму, например, благодаря поверхностному натяжению. Соответствующее соотношение примет вид:

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 + \varphi \left(\frac{\mu_0 + \frac{5}{2}\bar{\mu}}{\mu_0 + \bar{\mu}} \right) \right\}, \tag{1.2}$$

в котором $\bar{\mu}$ - вязкость жидкости, образующей капли. Когда $\bar{\mu}$ становится бесконечно большим, т.е. когда капли оказываются, в сущности, твердыми частицами, это соотношение сводится к (1.1).

Эффективная вязкость суспензии твердых асимметричных частиц возрастает при увеличении, как концентрации частиц, так и степени их асимметричности. Эта зависимость определяется соотношением:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + K\varphi \right),$$

где K (геометрический фактор) больше $5/2$. В случае твердых примесей несферических частиц, имеющих форму эллипсоидов вращения с отношениями полуосей 6:1 K принимает значение равным 5 и вязкость смеси возрастает согласно формуле [2]:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 5\varphi \right), \tag{1.3}$$

Сделанные допущения дают возможность учесть известные контактные условия сопряжения линейной гидроупругости. Если теперь принять во внимание условие непроницаемости и полагать, что трубка жестко прикреплена к окружающей среде, вследствие чего материал стенки не может совершать движение вдоль ее оси x, то в силу сделанных выше предпосылок, усредненные уравнения неразрывности и Навье-Стокса для смеси в целом можно записать в виде [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{8\mu}{\rho_f R^2}u=0, \tag{1.5}$$

В (1.4)-(1.5) $w(x,t)$- радиальное перемещение трубки радиуса R и толщиной h, $u(x,t)$- усредненная скорость течения смеси, $p(x,t)$- гидродинамическое давление. Что касается динамического коэффициента вязкости смеси μ, то он, в зависимости от концентрации φ, должен быть определен в конкретных примерах посредством формул (1.1)-(1.3).

Систему (1.4) и (1.5) можно свести к одному уравнению следующего вида:

$$\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{8\mu}{\rho_f R^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

Заменяя здесь $\frac{\partial u}{\partial x}$ на $-\frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial t}$ и подставляя это в последнюю зависимость, получим

$$\frac{1}{\rho_f}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{16\mu}{\rho_f R^3}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1.6}$$

Далее, для замыкания уравнения (1.6), выпишем уравнение состояния для материала трубки, полагая, что она является упругой, ортотропной и тонкостенной. Для этих условий достаточно использовать следующее соотношение [4]

$$p=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h}{R^2}w+\rho_* h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.7}$$

Здесь, ρ_*- плотность материала трубки, ν_1 и ν_2- коэффициенты Пуассона, E_2- модуль упругости в окружном направлении. Заметим, что при этом должно выполняться условие Максвелла

$$E_2\nu_1=E_1\nu_2,$$

где E_1- осевой модуль Юнга.

Возьмем в равенстве (1.7) вторую производную по x и полученный таким образом результат учтем в (1.6). Тогда, переходя к следующим обозначениям

$$c_0^2=\frac{E_2}{2\rho_f(1-\nu_1\nu_2)}\frac{h}{R} \quad \text{и} \quad \frac{\rho_*}{\rho_f}=\rho,$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho\frac{Rh}{2c_0^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{8\mu}{\rho_f c_0^2 R^2}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (1.8)$$

которое описывает динамическое поведение системы «оболочка жидкость».

2. Для описания сложных импульсов, характерных волновым процессам, будем исходить из метода Фурье и решение уравнения (1.8) представим в виде конечной суммы основного колебания и более высоких гармоник. Это утверждение позволяет функцию w представить следующим образом:

$$w=\sum_{s=1}^{S} y_s(x)\exp(is\omega t). \qquad (2.1)$$

Здесь, $y_s(x)$ - искомые комплексные функции координаты положения, ω - задаваемая круговая частота, i - мнимая единица, а S – гармоническое число. В силу линейности системы проследим прохождение каждой гармоники s и затем для определения формы возмущения просуммируем составляющие, соответствующие данной точке. Подставляя (2.1) в (1.8), для s – ой гармоники будем иметь:

$$y_s''+\lambda_s^2\, y_s=0, \qquad (2.2)$$

где штрих означает дифференцирование по координате x, а величина λ_s определяется из решения следующего дисперсионного уравнения

$$\lambda_s^2=\frac{\dfrac{\omega}{c_0^2}s\left\{\omega s-i\dfrac{8\mu}{\rho_f R^2}\right\}}{1-\rho\dfrac{Rh}{2c_0^2}\omega^2 c_0^2}. \qquad (2.3)$$

Расчленяя уравнение (2.3) на действительную и мнимую части и введя следующие обозначения

$$\lambda_{0s} = \frac{\dfrac{s^2\omega^2}{c_0^2}}{1-\rho\dfrac{Rh}{2c_0^2}\omega^2 s^2}, \qquad \lambda_{1s} = -\frac{\dfrac{s\omega}{c_0^2}\dfrac{8\mu}{\rho_f R^2}}{1-\rho\dfrac{Rh}{2c_0^2}\omega^2 s^2},$$

получим

$$\lambda_s^2 = \lambda_{0s} - i\lambda_{1s}. \tag{2.4}$$

Разрешая дисперсионное уравнение (2.4), и выбирая корень $\mathrm{Im}\lambda < 0$, для λ_s по известной формуле вычисления квадратного корня из комплексного числа, найдем:

$$\lambda_s = \delta_{0s} - i\delta_{1s}. \tag{2.5}$$

В (2.5) принято, что

$$\delta_{0s} = \left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_{0s} + m\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_{1s} = \left\{\frac{1}{2}\left(m_s - \lambda_{0s}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ а } \ m_s = \left(\lambda_{0s}^2 + \lambda_{1s}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При этом скорость распространения s-ой волны определяется как $s\omega/\delta_{0s}$, а δ_{1s} - коэффициент её затухания.

3. Заметим сначала, что общее решение уравнения (2.2) записывается в форме

$$y_s = A_s e^{-i\lambda_s x} + B_s e^{i\lambda_s x} \tag{3.1}$$

где A_s и B_s - постоянные интегрирования, определяемые исходя из граничных условий, которые будут определены ниже. Теперь для функций w и p можно записать

$$w = \sum_{s=1}^{S}\left\{A_s e^{-i\lambda_s x} + B_s e^{i\lambda_s x}\right\}\exp\left(is\omega t\right), \tag{3.2}$$

и

$$p = \left\{\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h}{R^2} - \rho_* h\omega^2\right\}\sum_{s=1}^{S}\left(A_s e^{-i\lambda_s x} + B_s e^{i\lambda_s x}\right)\exp\left(is\omega t\right). \tag{3.3}$$

Оба эти результата вытекают из формул (1.7) и (2.1), если учесть в них зависимость (3.1).

Теперь осталось определить скорость потока жидкости. Для этого положим

$$u=\sum_{s=1}^{S}U_s(x)\exp(is\omega t). \tag{3.4}$$

При таком представлении, из уравнения (1.5), после элементарных выкладок найдем:

$$u=-i\left\{\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h}{R^2}-\rho_{ж}h\omega^2\right\}\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda s}{I_s}\left(-A_s e^{-i\lambda_s x}+B_s e^{i\lambda_s x}\right)\exp(is\omega t). \tag{3.5}$$

где величина

$$I_s=\rho_f\left(is\omega+\frac{8\mu}{\rho_f R^2}\right),$$

определяемая как

$$I_s=-\left(\frac{\partial p_s}{\partial x}\right)\bigg/u_s,$$

является гидравлическим импедансом s- ой гармоники. Значение $8\mu/R^2$ - характеризует гидравлическое сопротивление, а $\omega s\rho_f$ - индукцию. Отсюда непосредственно следует, что гидравлическое сопротивление линейным образом зависит от μ, а индукция – от гармоники s.

4. Опишем распределение давления, скорости потока и перемещения для прямоосной трубки длиной l. Для этого сформулируем следующие граничные условия. Пусть давление изменяется по закону

$$\sum_{s=1}^{S}p_{0s}\exp(is\omega t) \tag{4.1}$$

при $x=0$ и, ради простоты, равно нулю при $x=l$. В (4.1) p_{0s} - задаваемые эмпирические постоянные. В силу выписанных краевых условий, запишем полученную систему алгебраических уравнений, необходимых для определения A_s и B_s. Она имеет вид:

$$\alpha(A_s+B_s)=p_{0s},$$

$$A_s e^{-i\lambda_s l}+B_s e^{-i\lambda_s l}=0,$$

где

$$\alpha = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{h}{R^2} - \rho_* h\omega^2 .$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$A_s = -i\frac{p_{0s}\, e^{i\lambda_s l}}{2\alpha\sin\lambda_s l}, \quad \text{а} \quad B_s = i\frac{p_{0s}\, e^{-i\lambda_s l}}{2\alpha\sin\lambda_s l},$$

Используя эти выражения в (3.2),(3.3) и (3.5), найдем:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{S} p_{0s}\frac{\sin\lambda_s(x-l)}{\sin\lambda_s l}\exp(is\omega t), \tag{4.2}$$

$$p(x,t) = -\sum_{s=1}^{S} p_{0s}\frac{\sin\lambda_s(x-l)}{\sin\lambda_s l}\exp(is\omega t), \tag{4.3}$$

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_s}{I_s} p_{0s}\frac{\cos\lambda_s(x-l)}{\sin\lambda_s l}\exp(is\omega t). \tag{4.4}$$

Соответствующие соотношения для предельного случая полубесконечной трубки могут быть получены с помощью вычисления предела выражений (4.2)-(4.4) при стремлении l к бесконечности. Можно показать, что при $\operatorname{Im}\lambda_s < 0$, (что было отмечено выше)

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\sin\lambda_s(x-l)}{\sin\lambda_s l} = -e^{-i\lambda_s x},$$

а

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\cos\lambda_s(x-l)}{\sin\lambda_s l} = i\,e^{-i\lambda_s x},$$

Тогда из приведенных выше формул, вытекает, что соответствующее решение можно записать следующим образом:

$$w(x,t)=\frac{1}{\alpha}\sum_{s=1}^{S} p_{0s}e^{-i\lambda_s x}\exp(is\omega t), \tag{4.5}$$

$$p(x,t)=\sum_{s=1}^{S} p_{0s}e^{-i\lambda_s x}\exp(is\omega t), \tag{4.6}$$

$$u(x,t)=i\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_s}{I_s} p_{0s}e^{-i\lambda_s x}\exp(is\omega t). \tag{4.7}$$

Отметим, что в силу линейности системы, физический смысл имеют действительные части построенного решения.

Перейдем вначале к вычислению амплитуды давления $|p_s|$ для s - ой гармоники. Имеем:

$$p_s = p_{0s}e^{-i\lambda_s x}e^{is\omega t},$$

откуда в силу (2.5) и в соответствии с формулой Эйлера можно записать

$$p_s = p_{0s}e^{-i\delta_{0s}x}e^{-\delta_{1s}x}\{\cos(s\omega t)+i\sin(s\omega t)\}.$$

Для амплитуды давления, из предыдущего равенства, легко получить, что

$$|p_s| = p_{0s}\,e^{-\delta_{1s}x}. \tag{4.8}$$

Следуя равенству (4.5), для амплитуды перемещения сразу запишем

$$|w_s| = \frac{p_{0s}}{\alpha}e^{-\delta_{1s}x}. \tag{4.9}$$

Поступая аналогичным образом, можно вычислить амплитуду скорости потока, которая для s - ой гармоники имеет вид:

$$|u_s| = p_{0s}\,e^{-\delta_{1s}x}\,\frac{\sqrt{a_{1s}+a_{2s}}}{a_{0s}}. \tag{4.10}$$

Здесь коэффициенты a_{0s}, a_{1s} и a_{2s} записываются следующим образом:

$$a_{0s}=\frac{64\mu^2}{R^4}+\rho_f^2 s^2\omega^2,\quad a_{1s}=\frac{8\mu}{R^2}\delta_{1s}+\rho_f s\omega\delta_{0s},$$

$$a_{2s}=\frac{8\mu}{R^2}\delta_{0s}-\rho_f s\omega\delta_{1s}.$$

5. Для оценки вклада, получаемого от учета «поправки» для динамического коэффициента вязкости, проведем численный эксперимент. Так как в принципе нас интересует влияние неоднородности, то для получения численного результата примем, что трубка ортотропна. Зададим следующие параметры системы:
$R = 0.5$ см, $\bar{\mu}_0 = 0.1$ г/см · сек, $h = 0.2$ см, $\rho_f = \rho_* = 1$ г/см^3, $\rho = 1$, $\omega = 2\pi$ сек$^{-1}$, $x = 0$, $E_2 = 4 \cdot 10^6$ дин/см^2, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.3$, $p_{01} = 1{,}4 \cdot 10^3$ дин/см^2, $p_{03} = 2{,}4 \cdot 10^2$ дин/см^2.

В таблице 1 приведены значения скорости волны в зависимости от концентрации φ, при $s = 1$ и $s = 3$, когда эффективная вязкость вычисляется по формуле (1.1).

Таблица 1

φ / s		0	0,1	0,2	0,3
1	$c(см/сек)$	882	855	824	793
3	$c(см/сек)$	895	889	905	901

В таблице 2 для того же варианта даны значения коэффициента затухания от φ.

Таблица 2

φ / s		0	0,1	0,2	0,3
1	$\delta_1\,(1/сек)$	0,0017	0,0025	0,0038	0,0039
3	$\delta_1\,(1/сек)$	0,0018	0,0026	0,0035	0,0043

В таблице 3 в том же случае дана зависимость амплитуды скорости течения смеси для различных объемных концентраций.

Таблица 3

φ / s		0	0,1	0,2	0,3
1	$\lvert u_s \rvert (см/сек)$	1,43	1,34	1,25	1,17
3	$\lvert u_s \rvert (см/сек)$	0,26	0,25	0,25	0,24

На основе полученных численных расчетов, можно сделать следующие выводы:

- скорость волны и амплитуда скорости потока уменьшаются с увеличением φ
- наиболее сильное увеличение зависимости от концентрации наблюдается у коэффициента δ_1 (почти в два раза)
- с увеличением гармоники скорость волны возрастает

ЛИТЕРАТУРА

1. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971, 536 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973, 847 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М., «Наука», 1979, 320 с.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных сосудов. М., «Мир», 1983, 400 с.

DİSPERS MAYENİN ORTOTROP BORUCUQDA PULSVARI AXINI

R.Y.ƏMƏNZADƏ, N.A.CAHANGİROVA, E.T.QİYASBƏYLİ

ANNOTASİYA

İşdə içərisində sıxılmayan dispers qəbul edilən maye yerləşən ortotrop elastik borucuqda harmonik dalğaların yayılması haqqında birölçülü məsələnin həlli verilir. Disperslik aparıcı fazanın dinamik özlülük əmsalına edilən «düzəlişlə» nəzərə alınır.

PULSATING FLOW OF DISPERSION FLUID IN ORTOTROPIC TUBE

R.Yu.AMENZADEH, N.A.GANGIROVA, E.T.KIYASBEYLI

ABSTRACT

The solution of one dimensional problem about tube containing fluid, which accepted incompressible and dispersion is given in the published work.

The last one is taken into consideration by means of "improving" for dinamical coefficient viscositi of bearing phase.